

Tentamen Complexe Analyse
18/04/06, 14.00–17.00 uur

1. Bepaal de maximum modulus van de functie $z(z+i)(z+2i)$ voor $|z| \leq 1$.
 Beargumenteer het antwoord.

2. Beschouw de functie

$$f(z) = \frac{1}{e^{z^2} - 1}.$$

- (a) Bepaal alle polen van $f(z)$ in $|z| < 3$ en hun orde.
 (b) Bepaal de bijbehorende residuen.
 (c) Bereken de integraal $\int_C f(z) dz$, waarbij C de cirkel $|z| = 3$ voorstelt.

3. Bepaal de integraal

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 + \cos \theta} d\theta.$$

Aanwijzing: Pas de substitutie $z = e^{i\theta}$ toe.

4. Bepaal met behulp van residuenrekening de volgende oneigenlijke integraal

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^4}{1+x^6} dx.$$

5. Laat C de in positieve zin doorlopen eenheidscirkel zijn en laat $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- (a) Bepaal de integraal

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^n dz.$$

- (b) Laat zien dat voor $z \in C$ de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n$$

convergeert en bepaal de som van deze reeks.

- (c) Bepaal met behulp van residuenrekening de integraal

$$\int_C \frac{3z}{z^2 - 3z + 1} dz.$$

- (d) Bepaal de som van de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k+1}} \binom{2k+1}{k}.$$